TD$_{14}$ – Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 ★

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi jointe est reportée dans le tableau suivant :

X \ Y	1	2
3	a	2a
4	3a	4a

1. Déterminer la valeur de a
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{V}(Y)$
3. Déterminer $\mathbb{E}(XY)$, puis calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 ★★

Dans un fast-food, entre 14h et 14h15, le nombre X de clients suit une loi de Poisson de paramètre 10. Il y a 4 caisses pour prendre les commandes. Le gérant (très joueur) expérimente un nouveau système baptisé Happy-Bazar : les clients qui arrivent reçoivent « au hasard »et indépendamment les uns des autres un numéro de caisse vers laquelle ils doivent se diriger. On note X_i le nombre de clients dirigés vers la caisse i pendant ce quart d'heure.

1. Quelle est la loi de X_1 sachant $[X = n]$ $(n \in \mathbb{N})$?
2. En déduire la loi de X_1.
3. Que peut-on dire des lois de X_2, X_3 et X_4 ?
4. Quelle est la loi de $Y = X_1 + X_2$?
5. Déterminer la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 3 ★★

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p), p \in]0, 1[$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Y \geqslant k)$.
2. Déterminer la loi de $U = \min(X, Y)$. Montrer que U suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
3. Déterminer la loi de $V = \max(X, Y)$.

Exercice 4 ★★★

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$ et $\mathbb{V}(X + Y)$.
2. Déterminer la loi de X sachant $[X + Y = n]$.

Exercice 5 Matrices aléatoires ★★★

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que $M(\omega)$ soit inversible.

Exercice 6 ★

Soit $a > 0$ et soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à support dans $\mathbb{N}$, telles que la loi jointe du couple (X, Y) soit donnée par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \lambda \frac{a^{i+j}}{i!j!}.$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Donner les lois marginales du couple (X, Y).
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 ★★

Soit $p \in]0,1[$, et soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi jointe est donnée par

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([X=n] \cap [Y=k]) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k & \text{si } k \geqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y). Quelle est la loi de $X+1$? En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Montrer que X et $Y-X$ suivent la même loi.
4. Montrer que X et $Y-X$ sont indépendantes. En déduire $\operatorname{Cov}(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 ★★★

Soient X et Y deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé, suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2.

1. Montrer que $|\operatorname{Cov}(X,Y)| \leqslant \frac{1}{4}$.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.

Exercice 9 ★★

Soit $p \in]0,1[$. Déterminer c pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n, $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{p^{n+1}}{(n+1)c}, n \in \mathbb{N}$.

Déterminer alors la fonction génératrice de X, son espérance et sa variance.

Exercice 10 ★★

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X étant à valeurs dans $\mathbb{N}$ et Y suivant la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0,1[$).

1. Déterminer la fonction génératrice de $Z = XY$ en fonction de celle de X.
2. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, montrer que $G_Z = G_Y \circ G_X$
3. En déduire dans ce cas l'espérance et la variance de Z.

Exercice 11 ★★

Soit X de loi $\mathcal{B}(n,p)$ et Y de loi $\mathcal{B}(m,p)$ indépendantes.

1. Quelle est la loi de $S = X+Y$?
2. Donner la loi conditionnelle de X sachant que $[S=s]$ où $s \in [\![0, n+m]\!]$.
3. On suppose que $p = \frac{1}{2}$. Calculer $\mathbb{P}(X \neq Y)$ et $\mathbb{P}(X=Y)$.

Exercice 12 ★★

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $\dfrac{X+Y}{1+Z}$ admet une espérance, et la déterminer.

Exercice 13 ★★

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{2}{3}.$$

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer la loi de $Y_i = X_i - 1$.

2. Quelle est la loi de $Y_1 + \cdots + Y_n$?
3. En déduire la loi de S_n.

Exercice 14 ★★★

A chaque fois qu'on le lance, un dé donne un 6 avec la probabilité $p \in]0,1[$. On le lance n fois, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus et on pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$. On cherche à estimer expérimentalement la valeur de p.

1. Donner la loi de X_n, son espérance et sa variance.
2. Montrer que $\mathbb{V}(F_n) \leqslant \dfrac{1}{4n}$.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une condition suffisante sur n pour que
$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant 10^{-2}) \leqslant 0,05.$$
4. Que devient cette condition si l'on remplace 10^{-2} par 10^{-3} ?

Exercice 15 ★★★

Une compagnie d'assurance assure 500 navires pour une somme de 5 millions chacun. Chaque navire a par an une probabilité de couler égale à 0.001. S'il ne coule pas, il est considéré comme en état de marche.

1. X est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de navires coulés par an. Trouver sa loi puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Quelles réserves doit posséder la compagnie pour être sûre de payer les indemnités avec une probabilité de 0.999 à la fin de l'année ? On admet que si Y suit une loi de Poisson de paramètre 1/2 alors
$$\mathbb{P}((Y \leqslant a) \geqslant 0.999 \quad \Rightarrow \quad a \geqslant 4$$

Exercice 16 ★★★★★

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance, que l'on notera par la suite m_n.
2. Soient $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Exprimer l'espérance de $\dfrac{S_k}{S_n}$ en fonction de m_n.

Exercice 17 Somme aléatoire de variables aléatoires, Identité de Wald ★★★★★

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ et soit N une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On définit une application X sur Ω par $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_i$, c'est-à-dire que, pour $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$.

1. Montrer que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
2. On suppose que les X_i suivent tous la même loi, que N est indépendant de la famille $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et que X_0 et N admettent une espérance. Montrer qu'alors X admet une espérance et que
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_0)$$

Exercices issus d'oraux

Exercice 18 ★★★
(*Oral 2016*)

Soit $\alpha \in]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = (1-\alpha)\alpha^n$.

Soit N un entier fixé supérieur ou égal à 2. On note Q et R respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de X par N.

1. Donner les valeurs prises par les variables Q et R.
2. Donner la loi conjointe du coupe (Q, R)
3. Déterminer la loi de Q et de R.
4. Q et R sont-elles indépendantes ?

Exercice 19 ★★★
(*Oral 2018*)

On effectue une infinité de tirages aléatoires, le premier tirage s'effectuant dans $I_n = \{0, 1, , \cdots, n\}$

Si on tire le nombre p le tirage suivant s'effectue dans $I_p = \{0, 1, \cdots, p\}$ et ainsi de suite. On note X_k le résultat obtenu au tirage k.

1. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance
2. Déterminer la loi de X_{k+1} sachant $[X_k = p]$
3. Calculer $\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$ en fonction de la loi de X_k.
4. En déduire l'espérance de X_{k+1} en fonction de celle de X_k puis en déduire l'espérance de X_k.

Exercice 20 ★★★
(*Oral 2018*)

On considère deux amis qui partent à la pêche. Si le nombre de poissons attrapés est pair les deux amis se les répartissent équitablement et s'il est impair il font une bouillabaisse.

Le nombre X de poissons pêchés suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Une fois sur quatre les deux amis ne pêchent aucun poisson, en déduire la valeur de λ
2. Les deux amis ont-ils plus de chance de faire une bouillabaisse ou de se partager les poissons ?
3. Déterminer la probabilité que les deux amis se partagent les poissons et que le nombre de poissons de chacun soit pair.
4. On note Y la variable aléatoire que représente le nombre de poissons par individu à la sortie de la pêche. Déterminer la série génératrice de Y, en déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice 21 ★★★
(*Oral 2019,2023*)

On considère un détecteur de particules sur lequel arrive un nombre N de particules pendant une durée d donnée. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose que chaque particule est, de manière indépendante des autres, détectée avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note S le nombre de particules détectées pendant la durée d.

1. Pour $(n, s) \in \mathbb{N}^2$ déterminer $\mathbb{P}(S = s | N = n)$ puis $\mathbb{P}(N = n, S = s)$
2. En déduire la loi de S, son espérance et sa variance.
3. Déterminer la loi de $N - S$. Les variables S et $N - S$ sont-elles indépendantes ?
4. Les variables N et S sont-elle indépendantes ?
5. Calculer $\mathbb{P}(N = n | S = s)$.